MATERI GEOMETRI DASAR
KELAS OLIMPIADE MATEMATIKA SMP & SMA

GARIS TINGGI, BERAT, BAGI, SUMBU

Pada materi geometri (terutama segitiga), sangatlah penting bagi kita untuk mendalami properti dari masing masing garis diatas. Kita misalkan pada segitiga ABC, kita memiliki titik D,E,F pada BC,CA,AB secara berturut turut untuk 3 contoh dibawah.

*AD disebut garis bagi bila AD membagi <BAC mejadi 2 sama besar. Propertinya adalah BD:DC= AB:AC. Hal yang sama berlaku untuk garis BE dan CF. Selain itu, ketiga garis bagi ini konkuren (bertemu di satu titik yaitu titik incenter atau biasa disebut titik I. Titik ini merupakan pusat dari lingkaran singgung dalam segitiga ABC). Bila dari I ditarik ID,IE,IF tegak lurus BC,AC,AB, maka kita akan mempunyai BD=BF, CD=CE, AE=AF.

*AD disebut garis tinggi bila AD tegak lurus dengan BC. Hal yang sama berlaku untuk garis BE dan CF. Ketiga garis bagi ini konkuren (bertemu di satu titik yaitu titik tinggi atau biasa disebut titik H).

*AD disebut garis berat bila AD membagi BC menjadi 2 ruas sama panjang. Hal yang sama berlaku untuk garis BE dan CF. Ketiga garis bagi ini konkuren (bertemu di satu titik yaitu titik berat atau biasa disebut titik G). Propertinya adalah rasio AG:GD= BG:GE= CG:GF= 2:1. Selain itu, bila kita misalkan koordinat A=(x_1,y_1), B=(x_2,y_2), C=(x_3,y_3), maka koordinat G=$\left(\frac{x1+x2+x3}{3},\frac{y1+y2+y3}{3}\right)$.

Untuk garis sumbu, kita misalkan D,E,F berturut turut adalah titik tengah dari AB,BC,CA. Bila dari D, ditarik sebuah garis yang tegak lurus dengan AB, dan kita melakukan hal yang sama untuk E dan F, maka ketiga garis tersebut akan konkuren (bertemu di satu titik yaitu titik sumbu, yang juga merupakan excenter atau pusat lingkaran singgung luar segitiga ABC).

INCENTER dan EXCENTER

Melanjutkan dari materi sebelumnya, kita misalkan juga r adalah jari jari lingkaran singgung dalam segitiga ABC (incenter) dan R adalah jari jari lingkaran singgung luar segitiga ABC (excenter). Misalkan panjang AB,BC,CA berturut turut adalah c,a,b dan s adalah (a+b+c)/2. Kita memiliki 2 rumus berikut:

*Luas [ABC]= r.s

*Luas [ABC]= $\frac{abc}{4R}$

SUDUT LINGKARAN

Sebuah lingkaran (L) memiliki sebuah pusat (O) dan panjang radius(r). Selain itu, lingkaran juga memiliki garis lengkuk yang biasa kita sebut dengan busur. Mari kita misalkan, pada keliling suatu lingkaran, kita pilih 3 titik K,L,M. Properti lingkaran yang sering dipakai adalah sebagai berikut:

*<KLM=(besar busur KM dalam derajat)/2. Analog untuk <LMK dan <MKL (sudut sudut ini disebut sudut keliling). Dilain sisi, <KOM=besar busur KM dalam derajat. Analog untuk <LOK dan MOL (sudut sudut ini disebut sudut pusat). Maka sudut pusat bernilai 2x sudut keliling

*Bila suatu garis g menyinggung lingkaran di titik P, maka OP tegak lurus haris g

*Misal dari titik A diluar lingkaran, ditarik dua buah garis singgung ke lingkaran L, maka panjang kedua garis itu sama

KUASA LINGKARAN

Bila ABCD segiempat siklis, dan perpanjangan garis AB dan CD bertemu di P. Maka segitiga PAD sebangun segitiga PCB (karena <PAD=180 - <BAD=c, analog untuk <PDA=b), sehingga $\frac{PA}{PD}=\frac{PC}{PB}$, yaitu PA.PB=PC.PD. Diluar itu, bila Q adalah pertemuan AC dan BD, kita juga punyai segitiga QAD sebangun QBC, sehingga $\frac{QA}{QD}=\frac{QC}{QB}$, yaitu QA.QB=QC.QD. Kuasa suatu titik P pada lingkaran, dinyatakan sebagai $OP^2 - r^2$.

SOAL LATIHAN

1. Tentukan banyaknya solusi (x,y,z) dengan $x<y<z$ bilangan asli, yang merupakan panjang sisi segitiga siku siku, dengan luas dan keliling segitiga tersebut sama.

A.0

B.1

C.2

D.3

E.4

2. Pada segitiga ABC, diketahui panjang AB=13 dan AC=15. Tentukan jumlah dari semua panjang BC yang mungkin, bila diketahui panjang garis tinggi AD=12.

A.10

B.14

C.18

D.21

E.25

3. Pada segitiga ABC dengan I titik baginya, diketahui kalau keliling segitiga tersebut adalah 56 dan luasnya adalah 168. Bila BC=20, hitunglah panjang AI.

A.10

B.12

C.16

D.20

E.24

4. Diberikan segitiga ABC dengan D berada di sisi BC dan AD merupakan garis bagi dalam. Bila BD:CD=3:5, AB+AC=16 dan <A=60, tentukanlah jumlah dari seluruh panjang AD yang mungkin.

A.2 $\sqrt{3}$

B.3 $\sqrt{3}$

C.4 $\sqrt{3}$

D.5 $\sqrt{3}$

E.6 $\sqrt{3}$

5. Pada segitiga ABC (siku siku di A), diketahui AB=30 dan AC=40. Bila AD adalah garis tinggi dan E adalah titik tengah AD, maka tentukanlah panjang BE.

A. $6\sqrt{13}$

B. $8\sqrt{13}$

C.12

D.15

E.20

6. Pada segitiga ABC, AD dan BE adalah garis berat yang saling tegak lurus. Bila AC=8, BC=6, berapakah AB^2?

A.10

B.16

C.20

D.25

E.30

7. Diketahui lingkaran T adalah lingkaran luar segitiga ABC dan lingkaran dalam segitiga PQR. Jika ABC dan PQR keduanya sama sisi, maka tentukanlah rasio keliling segitiga ABC:PQR.

A.1:1

B.1:2

C.2:3

D.1:4

E.3:2

8. Titik A dan B terletak pada suatu lingkaran, dengan pusat O. Bila ada titik X diluar lingkaran, sehingga AX dan BX memotong lingkaran di D dan C secara berurutan, dan diketahui <AOB=100, <COD=60, tentukanlah besar <AXB.

A.15

B.18

C.20

D.30

E.45

9. ABCD adalah persegi dengan panjang sisinya 9. Titik P di AB, AP=7, PB=2, dan dibuat seperempat lingkaran BCD (dengan pusat C dan jari jari BC). Dari P, ditarik garis PQ (Q di AB) sehingga PQ menyinggung seperempat lingkaran tersebut. Tentukanlah panjang QD.

A.36/11

B.4

C.63/11

D.6

E.7

10. Pada segitiga ABC, misalkan H adalah titik tingginya dan O adalah pusat lingkaran luarnya. Bila diketahui <BAH=20, tentukan besar <CAO.

A.20

B.30

C.40

C.45

D.60

PEMBAHASAN

1. Dari soal, kita tahu kalau $x.y=2(x+y+z)$, $(xy-2x-2y)^2=(2z)^2$, $x^2y^2+4x^2+4y^2-4x^2y-4xy^2+8xy=4x^2+4y^2$ (karena $z^2=x^2+y^2$). Maka, kita punya $x^2y^2-4x^2y-4xy^2+8xy=0$, $xy-4x-4y+8=0$, $(x-4)(y-4)=8=1.8=2.4$. Dari sini, didapat solusi $(x,y,z)=(5,12,13)$ dan $(6,8,10)$. Jadi ada 2 solusi.

2. Ada 2 kemungkinan, yaitu bila segitiga ABC lancip dan bila ABC tumpul. Pada kasus lancip, kita tahu BD=5 dan CD=9 sehingga BC bernilai 14. Pada kasus tumpul (tumpul di B), kita tahu BD=5 dan CD=9, sehingga BC=4 (karena B diantara D dan C). Sehingga, jawaban soal adalah 18.

3. Dari soal, L=168, s=28. Maka, kita dapat mencari jari jari lingkaran dalam, r=L/s=6. Misalkan lingkaran tersebut menyinggung AB,AC,BC di F,E,D secara berturut turut. Mengingat 20=BC= CD+CD= BF+CE, kita dapati AE+AF=16, sehingga AE=8 dan karena $AI^2=AE^2+IE^2$, didapat AI=10.

4. Dikarenakan AD garis bagi, maka AB:AC=BD:CD=3:5. Mengingat AB+AC=16, kita mendapati AB=6, AC=10. Dari dalil cosinus, $BC^2=10^2+6^2-120.(1/2)=76$, $BC=2\sqrt{19}$, sehingga $BD=\frac{3\sqrt{19}}{4}$.

Dengan menggunakan dalil cosinus pada segitiga ABD (misal AD=x), $\frac{171}{16}=36+x^2-6\sqrt{3}x$,

$16x^2 - 96\sqrt{3}x + 405 = 0$, $(4x - 15\sqrt{3})(4x - 9\sqrt{3}) = 0$, $x = \frac{9}{4}\sqrt{3} \,/\, x = \frac{15}{4}\sqrt{3}$. Maka, jumlah dari nilai nilai x yang mungkin adalah $6\sqrt{3}$.

5. Dari soal, kita bisa mendapatkan BC=50. Selanjutnya, dikarenakan AD.BC=AB.AC, kita mendapati AD=24, maka DE=12. Lalu, mengingat AB^2=BD.CD, BD=18. Dari sini, kita dapat menghitung BE, $BE^2=12^2+18^2$, BE=$6\sqrt{13}$.

6. Misalkan AD bertemu BE di G, dan misalkan juga AD=3x dan BE=3y. Maka, dengan dalil garis berat, AG=2x, GD=x, BG=2y, GE=y. Pada segitiga DGB, $9=x^2+4y^2$ dan pada segitiga AGE, $16=4x^2+y^2$. Maka, dengan menjumlahkan kedua persamaan tersebut, didapati $x^2+y^2=5$, dan $AB^2=4x^2+4y^2=20$.

7. Misal AB=a dan PQ=b, kita akan mencari rasio keliling (3a:3b=a:b). Misalkan juga jari jari lingkaran T adalah x. Dari segitiga ABC, kita dapati r= $\frac{a^3}{4.\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$, sedangkan dari PQR, kita dapati r= $\frac{\frac{1}{4}b^2\sqrt{3}}{\frac{3}{2}b} = \frac{b}{2\sqrt{3}}$, Dari sini, kita mendapatkan a:b=1:2.

8. Karena <AOB=100, maka <ACB=50 (sehingga <ACX=130). Dengan cara serupa, <CAD=30. Perhatikan segitiga ACX, kita mendapati <AXC=20=<AXB.

9. Misalkan panjang QD=x, QA=9-x. Dari titik C, tarik garis CF (F di PQ) sehingga CF tegak lurus PQ. Karena segitiga CFP dan CBP kongruen, maka BP=PF=2. Dengan cara serupa, didapati juga QD=QF=x, sehingga PQ=x+2. Maka, dari segitiga APQ, $(x+2)^2=7^2+(9-x)^2$, sehingga didapatkan x= $\frac{63}{11}$.

10. Perhatikan kalau <ABC=70 sehingga <AOC=2.70=140. Dari sini, dikarenakan segitiga AOC sama kaki, didapat <COA=20.